La ley de la gravitación universal

R. O. Barrachina

Después de haber trabajado incesantemente durante mucho tiempo, usando las observaciones de Brahe, descubrí las verdaderas distancias de las órbitas. ¡Al fin, al fin, la verdadera relación!.. y si Ustedes quieren saber el momento exacto, fue concebida mentalmente el 8 de Marzo en ese año de mil seiscientos dieciocho, pero puesta en cálculo de una forma tan desafortunada, que la supuse falsa, para finalmente volver a ella el 15 de Mayo. Adoptando una nueva línea de ataque, ... venció fuertemente las sombras de mi mente. Era tal la plenitud de concordancia entre mis diecisiete años de trabajo y este estudio actual mío, que al principio creí estar soñando.
Johannes Kepler en Harmonices Mundi, Libro V *(1919), refiriéndose al descubrimiento de la ley "armónica" que hoy denominamos como "tercera ley de Kepler"* .

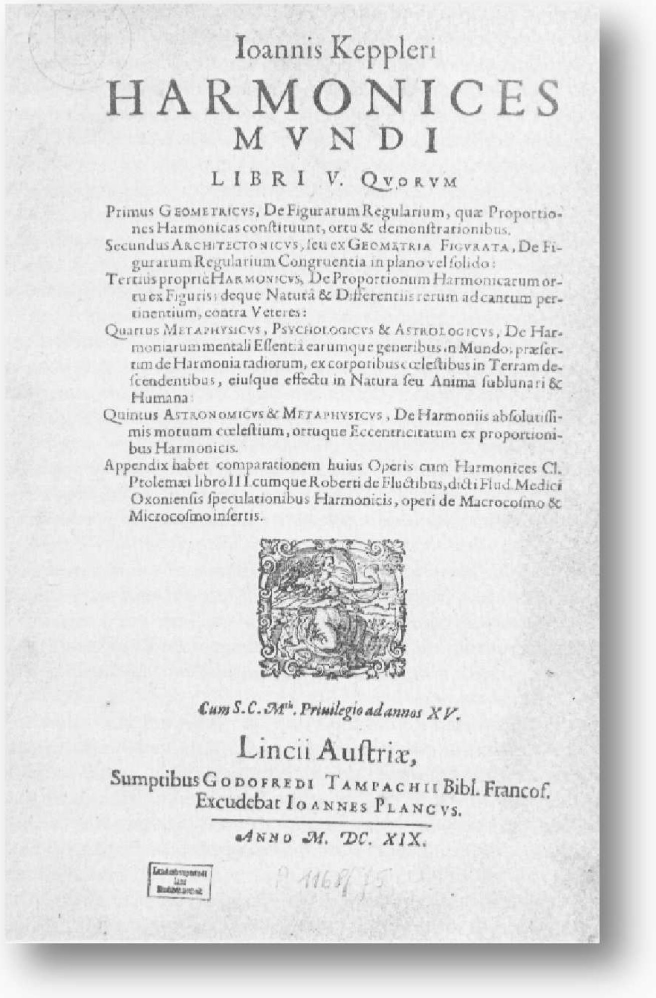
1. La Ley Armónica de Kepler

En otro apunte habíamos contado como, en 1609, Johannes Kepler (1571-1630) había publicado su *Astronomía Nova* donde postulaba lo que hoy conocemos como sus primeras dos leyes del movimiento orbital,

- Los planetas se mueven en órbitas elípticas, con el Sol en uno de sus focos.
- Una recta que va del planeta al Sol barre áreas iguales en tiempos iguales.

La ley de fuerzas que mantiene a los planetas en sus órbitas estaba *codificada* –tal como veremos en otro apunte– en su primera ley. Sin embargo esto no se advertiría hasta mucho más tarde. La clave para el descubrimiento de la ley de fuerza de cuadrado inverso, lo daría una tercera ley que representaría uno de los hallazgos más importante de Kepler.

Con la publicación de su *Astronomia Nova*, Kepler había propuesto que los planetas se movían en órbitas elípticas. Pero no parecía haber un patrón general para las distintas órbitas de todos los planetas, salvo por la conservación de la velocidad aerolar. Kepler se obsesionó con la búsqueda de una *Tercera Ley*, que relacionara los radios de las distintas órbitas.



Ioannis Keppleri
HARMONICES MVNDI
LIBRI V. QVORVM

Primus GEOMETRICVS, De Figurarum Regularium, quæ Proportiones Harmonicas constituunt, ortu & demonstrationibus.
Secundus ARCHITECTONICVS, seu ex GEOMETRIA FIGVRATA, De Figurarum Regularium Congruentia in plano vel solido:
Tertius propriè HARMONICVS, De Proportionum Harmonicarum ortu ex Figuris; deque Naturâ & Differentiis rerum ad cantum pertinentium, contra Veteres:
Quartus METAPHYSICVS, PSYCHOLOGICVS & ASTROLOGICVS, De Harmoniarum mentali Essentiâ earumque generibus in Mundo; præsertim de Harmonia radiorum, ex corporibus cœlestibus in Terram descendentibus, eiusque effectu in Natura seu Anima sublunari & Humana:
Quintus ASTRONOMICVS & METAPHYSICVS, De Harmoniis absolutissimis motuum cœlestium, ortuque Eccentricitatum ex proportionibus Harmonicis.
Appendix habet comparationem huius Operis cum Harmonices Cl. Ptolemæi libro III. cumque Roberti de Fluctibus, dicti Flud. Medici Oxoniensis speculationibus Harmonicis, operi de Macrocosmo & Microcosmo insertis.

Cum S. C. M^{tis}. Privilegio ad annos XV.

Lincii Austriæ,
Sumptibus GODOFREDI TAMPACHII Bibl. Francof.
Excudebat IOANNES PLANCVS.

ANNO M. DC. XIX.

Portada del libro V de “Harmonices Mundi”, publicado por Johannes Kepler en 1619.

Finalmente pudo escribir de manera triunfal en su *Harmonice Mundi*:

> ... después de que había trabajado incesamente durante un largo período, usando las observaciones de Brahe, descubrí las verdaderas distancias de las órbitas, al fin, al fin, la verdadera relación ... venció fuertemente las sombras de mi mente, con tal plenitud de concordancia entre mis diecisiete años de trabajo y este estudio actual mío, que al principio creí estar soñando...

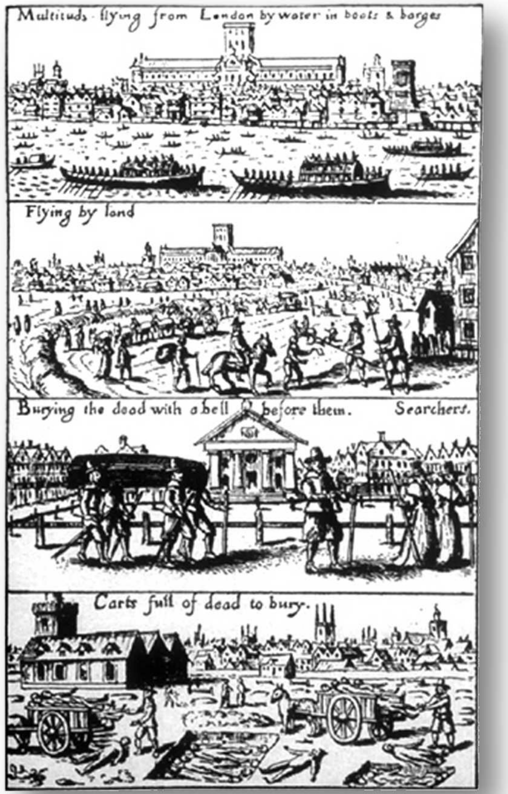
La ley que Kepler había encontrado era muy simple:

> **Ley Armónica**: El cuadrado de la duración de cada año planetario T es proporcional al cubo del eje mayor D de la órbita,
>
> $$T^2 = KD^3 ,$$
>
> donde K es una constante que tiene el mismo valor para todos los planetas, e inclusive la Luna.

Por fin, Kepler había logrado encontrar una *señal divina*, su música de las esferas. Esta ecuación significaba algo muy importante en el desarrollo de la ciencia, ya que era la primera vez que se formulaba una ley física en forma matemática, usando el lenguaje de la geometría y el álgebra. Además, fue la clave para que Newton pudiese demostrar que la interacción entre los Planetas y el Sol debía seguir una ley de cuadrado inverso con la distancia.

2. La Gran Plaga de 1665

En el verano de 1665, y tal como se anunció en aquel momento, *Le plugo al Dios Todopoderoso en su justa severidad, el visitar la villa de Cambridge con la plaga de pestilencia*[1].



Grabado anónimo con imágenes de la gran plaga de 1665.

El 1 de setiembre el gobierno civil prohibió toda reunión pública, y el 10 de Octubre el senado de la Universidad suspendió los sermones en Great St. Mary's y cerró las escuelas públicas. De hecho, estas eran decisiones tardías, puesto que hacía ya varios meses que los distinguidos colegas habían huido de la ciudad. Las universidades estaban prácticamente desiertas. En el Corpus Christi College, por ejemplo, sólo permanecían un profesor, dos estudiantes y unos pocos sirvientes. Tomaban ciertos polvos medicinales con el vino y quemaban una combinación de carbón, brea y azufre. Como acotación al margen, digamos que estos valientes lograron sobrevivir a la peste y a sus propias precauciones. A mediados de marzo de 1666, no habiendo ocurrido ninguna muerte por plaga durante seis semanas, la universidad invitó a sus profesores y alumnos a regresar. Pero, al parecer, en junio, la plaga decidió darse otra vuelta por la ciudad, y ocurrió un segundo éxodo. Recién en la primavera de 1667 se reanudaron las clases.

Durante este éxodo, muchos estudiantes decidieron mudarse a los mismos pueblos a donde habían emigrado sus respectivos profesores. Isaac Newton (1642 - 1727), que al comenzar la plaga contaba con 19 años, había obtenido recientemente su B.A. (Bachellor in Arts) y, a decir verdad, ya no necesitaba de su tutor Benjamin Pulleyn. Así que, en lugar de seguirlo, volvió a su patria chica, en el pueblecito de Woolsthorpe. Salió de Cambridge a fines de julio o principios de agosto de 1665, y volvió el 20 de marzo. Al comenzar la segunda plaga en junio, regresó a Woolsthorpe hasta fines de abril de 1667.

3. Isaac Newton

Isaac Newton (1642 - 1727) nació en la Navidad de 1642, el mismo año de la muerte de Galileo. Pero allí comienza y termina cualquier similitud entre ambos. Una comparación entre Galileo y Newton provee un interesante estudio de contrastes. La personalidad mundana y arrogante de Galileo no podía ser más distinta que la timidez y reserva de Isaac Newton. Mientras Galileo adoraba la controversia, Newton dejaba que sus amigos lucharan por él la mayoría de sus batallas. Galileo escondió su escepticismo tras una formal capitulación con la Inquisición. Newton era un cristiano convencido fanático.

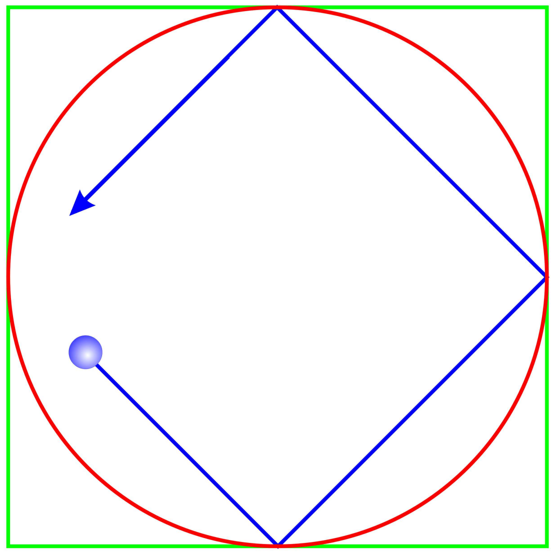
La familia de Newton se contentaba con que llegara a ser un buen granjero pero, advirtiendo su inclinación por el estudio, decidió mandarlo a Cambridge. Años de guerra civil, que llevaron a Carlos I al cadalso y a Oliver Cromwell al gobierno, habían deteriorado el nivel de la Universidad. La cátedra de Física, en aquella época conocida como "Filosofía Natural", estaba ocupada por Isaac Barrow, un teólogo que no se hacía demasiadas ilusiones sobre su propia capacidad para el puesto. Le enseñó a Newton lo mejor que pudo, y tan pronto como fue posible le cedió su lugar, cuando apenas contaba con 26 años.

Tres siglos antes, en Italia, un éxodo producido por una plaga fue el pretexto que encontró Boccaccio para escribir su "Decamerón". En Inglaterra, esos 18 meses de exilio, permitieron que Newton lograra un milagro de estudio científico, realizado grandes descubrimientos en casi todas las ramas de la ciencia. En matemáticas descubrió el teorema del binomio e inventó el Cálculo Diferencial. En óptica estudió la naturaleza del arco iris, diseñando una teoría completa de los colores. En mecánica unificó los trabajos de Kepler y Galileo en una teoría general del movimiento. Cualquiera de estos logros era, de por sí, asombroso. Juntos constituyen un verdadero milagro. A su retorno a Cambridge difundió parte de sus resultados sobre Óptica. Cuando finalmente su libro *Teoría de la luz y los colores* fue publicado, lo involucró en una controversia tan larga y amarga con sus rivales, que el tímido Newton decidió no publicar nunca más. Así es como, probablemente, nunca nos hubiésemos enterado de su Teoría General del Movimiento, de no mediar la intervención de Halley. 50 años más tarde, él recordaba los avances que logró en diversas areas de matemáticas, óptica y mecánica. En un pasaje de dicha memoria dice:

> Y en el mismo año [de 1666] comencé a pensar sobre la gravedad extendiéndose hasta la órbita de la luna y [...] de la regla de Kepler de los tiempos periódicos de los Planetas siendo en proporción sesquialterada de sus distancias desde el centro de sus orbitas, deduje que las fuerzas que mantienen los Planetas en sus órbitas debían [ser] recíprocamente como los cuadrados de sus distancias desde los centros sobre los que ellas giraban. Y así comparé la fuerza requerida para mantener la Luna en su órbita con la fuerza de gravedad en la superficie de la Tierra, y encontré que se replicaban bastante cercanamente. Todo esto fue en los dos años de plaga de 1665 – 1666.

4. La ley de fuerza de cuadrado inverso

Veamos cuál fue la demostración de Newton, tal como aparece en sus notas de dicha época. Imbuido en las ideas de colisión ó *percusión* de Descartes y en las demostraciones al estilo geométrico, imaginó un cuadrado circunscribiendo una órbita circular, y que la partícula, en lugar de seguir dicha trayectoria, se movía rebotando en los puntos de contacto del círculo y el cuadrado. Voy a ser completamente anacrónico y usar una terminología moderna. Tengan en cuenta que Newton recién llegó al concepto de masa en 1685, es decir veinte años después, y que usaba las palabras fuerza o presión indistintamente para referirse a lo que hoy llamamos trabajo, y fuerza de movimiento para lo que hoy denominamos impulso.



Deducción geométrica de la ley de cuadrado inverso.

Empecemos. En cada rebote la partícula invierte la componente de impulso perpendicular al lado. Por lo tanto, la variación del impulso en cada choque es igual al doble de esta componente, que a su vez es al impulso total como el lado del cuadrado externo es al lado del cuadrado interno, o equivalentemente, como el lado del cuadrado interno es a la mitad del lado del cuadrado externo. En otras palabras no estoy haciendo más que decir *raíz de dos* de una manera complicada. En una vuelta completa se producen cuatro rebotes, de manera que los choques que soporta el cuadrado externo equivalen a una variación de impulso que es al impulso de la partícula como la longitud de la trayectoria es al radio del círculo. Newton pasa entonces a afirmar sin demostración que la misma proporción se mantiene si el número de lados y puntos de impacto se multiplica por 2, una y otra vez. De esta manera, en una vuelta completa al círculo tenemos

$$\frac{\Delta p}{mv} = \frac{2\pi r}{r} .$$

Dividiendo por el período del movimiento orbital $T = 2\pi r/v$, obtenemos la fuerza

$$F = \frac{\Delta p}{T} = \frac{mv^2}{r} .$$

Ahora usamos la tercera ley de Kepler,

$$T^2 = kr^3 ,$$

para obtener

$$v = \frac{2\pi r}{T} \propto \frac{1}{\sqrt{r}}$$

y con ello resulta, finalmente, la ley del cuadrado inverso

$$F \propto \frac{1}{r^2} .$$

Estos descubrimientos no fueron hechos públicos por Newton hasta casi 20 años después. Esta demora hizo que se desarrollara una agria disputa con Robert Hooke (1635-1702) sobre la preminencia en el descubrimiento de la ley del cuadrado inverso y por acusaciones de plagio.

5. Masa gravitatoria

Si queremos completar la definición de la fuerza de gravedad, podemos seguir el método instrumentalista de Mach, indicando que, según demuestra Newton, entre dos partículas 1 y 2 cualesquiera existe una fuerza atractiva que depende de la distancia r entre ambas $\mathbf{F}_{21}(\mathbf{r}) = -k_{21}\hat{\mathbf{r}}/r^2$. donde la constante de proporcionalidad es positiva y depende -de alguna manera que queremos investigar- de ambas partículas.

Si cambiamos la partícula 1 por otra 0, la fuerza de interacción estará caracterizada por otra constante k_{20}. En este caso se verifica que k_{21}/k_{20} es completamente independiente de la partícula 2. Puede cambiarse dicha partícula 2 por cualquier otra con cualquier característica, que la relación k_{21}/k_{20} permanece inalterada. A esta cantidad la llamaremos *masa gravitatoria* de 1 en unidades de 0. Tomando a la partícula 0 como unidad[2], anotamos simplemente $\xi_1 = k_{21}/k_{20}$ y la llamamos masa gravitatoria de la partícula 1. Tenemos entonces que

$$\mathbf{F}_{21}(\mathbf{r}) = -k_{20}\,\xi_1\,\frac{\mathbf{r}}{r^3} .$$

O sea que la fuerza de interacción gravitatoria entre las partículas 2 y 1 sólo depende de la partícula 1 a través de su masa gravitatoria. Por simetría, la misma dependencia simple debe darse para la partícula 2, o sea

$$\mathbf{F}_{21}(\mathbf{r}) = -\gamma_0\,\xi_2\,\xi_1\,\frac{\mathbf{r}}{r^3} ,$$

donde γ_0 es una constante universal que sólo depende de la partícula 0, es decir de las unidades elegidas.

Estas *operaciones* nos han permitido definir la masa gravitatoria como una magnitud (definida con respecto a una masa "patrón" correspondiente a la partícula 0) que representa la mayor o menor respuesta de un cuerpo a una interacción gravitatoria. Por ahora constituye -junto con la masa inercial- una propiedad adicional de la materia.

6. Masa gravitatoria y masa inercial

Una gran parte de los *Principia* está dedicada a demostrar, por medio de muy complicados argumentos geométricos, que la primera y tercera leyes de Kepler pueden deducirse ahora de esta ley de interacción, que Newton denominó "Ley de la Gravitación Universal". Es interesante destacar que, después de haber inventado el Cálculo Diferencial, y habiéndolo utilizado para desarrollar su teoría, Newton no expone sus ideas en esos términos, sino que emplea argumentos geométricos infinitamente más complicados. Esto se debió a que en esa época se veía en los *Elementos* de Euclides la cumbre del pensamiento racional. Tal como veremos en otro apunte, ya en el tratado *De Motu* de fines de 1684, Newton demostró la relación entre una trayectoria elíptica y una fuerza proporcional al cuadrado inverso de la distancia. Poco tiempo después, en *De motu corporum*, introdujo el concepto de masa inercial, y ello le permitió realizar un descubrimiento muy importante. Newton tuvo la brillante idea de que que la misma ley de Gravitación Universal que rige el movimiento de los planetas, también debe ser responsable del peso de un cuerpo, aquí, en la superficie de la Tierra. Se sabe que Newton ya estaba dándole vueltas a esta idea desde la época de la Gran Plaga, pero aún no aparecía completamente desarrollada en *De Motu*. En este sentido es delator que mientras en la primera versión usa la palabra *gravity* para describir a la fuerza de atracción, más tarde vuelve sobre el manuscrito para cambiar esa palabra por la más neutra *centripetal attraction*. Donde *De Motu* era un tratado de dinámica orbital, *De Motu Corporum* es una demostración del concepto de Gravitación Universal.

Ahora bien, a partir del experimento de Galileo, Newton sabía que un cuerpo de masa inercial m en caída libre se mueve con una aceleración constante g. Por su propia segunda ley,

$$mg = \gamma_0 \, \xi \, \xi_T / r^2$$

donde ξ y ξ_T son las masas gravitatorias del cuerpo y de la Tierra respectivamente, y r es el radio de la Tierra. Pero para que g sea una constante independiente de m, la única opción es que la masa inercial m y la masa gravitatoria ξ sean -dentro del error experimental- proporcionales entre sí. Pensándolo bien, este es un resultado de lo más extraño. Pero todavía pasarían más de dos siglos antes de que alguien se cuestionara el porque de esta relación. Convencionalmente se eligen las mismas unidades para ambas cantidades, tomándolas iguales. Entonces, escribimos la Ley de Gravitación Universal de esta manera,

$$\mathbf{F}_{21}(\mathbf{r}) = -\gamma_0 \, m_2 \, m_1 \frac{\mathbf{r}}{r^3} \, .$$

7. ¡Newton mide la distancia a la Luna!

Con el descubrimiento de la proporcionalidad entre la masa inercial y la masa gravitatoria, Newton pudo hacer algo más interesante. Como la fuerza gravitatoria decrece con el cuadrado de la distancia, siendo el radio R de la órbita de la Luna R/r veces mayor que el radio r de la Tierra, la fuerza gravitatoria que siente la Luna es $(R/r)^2$ veces menor[3], $F = M_L g/(R/r)^2$. Por otro lado, la órbita de la Luna es casi circular y, tal como vimos en una sección anterior, la fuerza que siente debe ser igual a $F = M_L v^2/R$. Finalmente, la única incógnita que permanece en este pequeño divertimento matemático es el radio R de la órbita lunar. La masa desaparece al igualar ambas expresiones de la fuerza. La aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra ya había sido medida en tiempos de Newton, y es igual a $g = 9{,}78 m/seg^2$. También se conocía el radio de la Tierra desde los tiempos de Eratóstenes[4], $r \approx 6370 km$. Por último, como la Luna da una vuelta a la Tierra aproximadamente cada 28 días, es posible calcular su velocidad[5].

De esta manera, despejando la única incógnita de estas ecuaciones, Newton pudo calcular la distancia de la Tierra a la Luna, obteniendo el valor de 380000 km, que coincidía con el valor ya conocido en aquella época. ¡Fue un logro asombroso! Para obtener este resultado Newton sólo había supuesto que la Luna era un objeto material sujeto a las mismas leyes que cualquier otro objeto en la Tierra, demostrando así que no había diferencias entre los fenómenos celestes y terrestres. La órbita de la Luna es esencialmente idéntica a la trayectoria de una piedra arrojada por un niño. El mismo Newton ahondó sobre esta idea en sus *Principia*, al considerar cómo lanzar un proyectil “desde la cumbre de una alta montaña” de manera que no cayera a la Tierra. La idea es simple: Si arrojamos un objeto horizontalmente, este cae a la Tierra a cierta distancia. Si lo arrojamos con mayor velocidad, el objeto cae más lejos. Eventualmente, si lo arrojamos muy pero muy rápido[6], el objeto puede dar la vuelta a la Tierra y volver por detrás nuestro. El proyectil es ahora un satélite de la Tierra, similar a la Luna, pero de mucha menor masa y radio de giro.

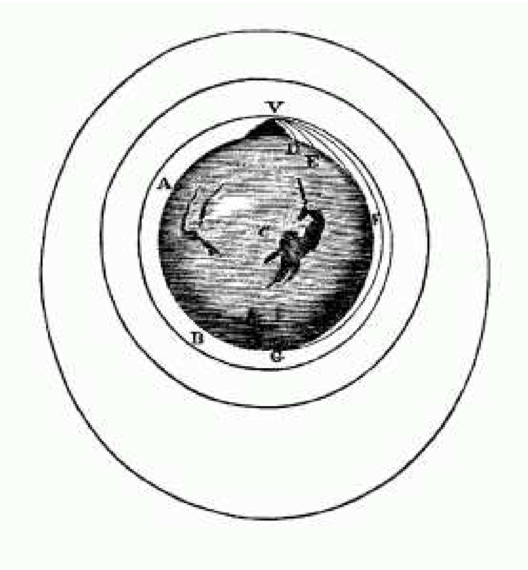


Imagen original del ejemplo de la montaña, tal como aparece en la edición de 1729 de los “Principia”.

La conmoción que causó este cálculo de la distancia de la Tierra a la Luna tuvo dos causas. Por un lado, los tiempos estaban maduros para una explicación simple del movimiento de los cuerpos celestes. El juicio a Galileo había servido para fortalecer el deseo de expurgar a los cielos de todo lo que sonara a sobrenatural. Y la ley propuesta por Newton lograba este propósito de maravillas.

Otro factor que contribuyó a que se generase este entusiasmo era puramente práctico. Durante mucho tiempo la astronomía era una ciencia subsidiaria de la astrología. Entonces, como ahora, se creía que el movimiento de los cuerpos celestes tenía influencia sobre la vida de los hombres. Así que predecir el movimiento de los astros era equivalente a predecir el futuro. Sin embargo, en la época de Newton, la astronomía se empezaba a ver como una herramienta imprescindible para la navegación marítima. Y para una nación como Inglaterra, cuya supervivencia dependía de su marina mercantes, mejorar la seguridad de la navegación era un tema de la más alta prioridad. Newton proveía con su ley una forma absolutamente “exacta” de predecir el movimiento de la Luna y los planetas.

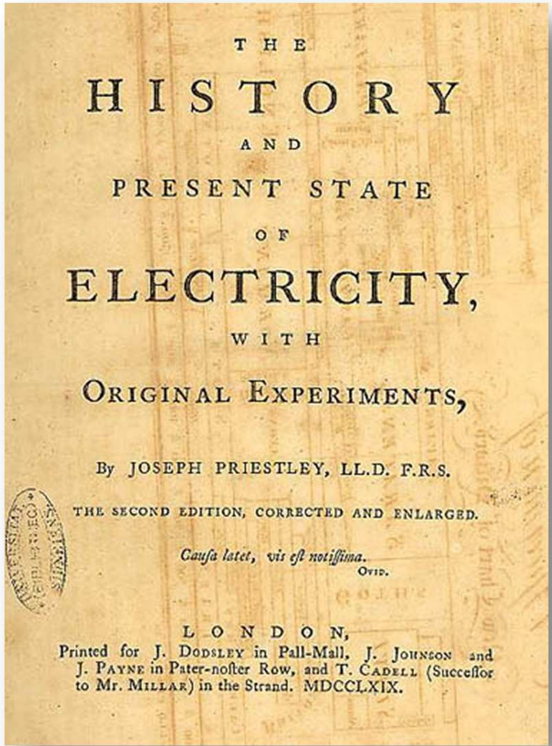
8. La ley de cuadrado inverso en electricidad y magnetismo

Conforme avanzaba el siglo XVIII, y dado el continuo éxito de la teoría newtoniana en las más diversas áreas de la física, no es sorprendente que muchos científicos, observando cualitativamente la rápida disminución de las fuerzas eléctricas y magnéticas con la distancia, supusieran que ellas también verificaban una ley de cuadrado inverso. En 1750, John Michell (1724-1793), joven miembro del Queen’s College de Cambridge, publicó observaciones que mostraban que la atracción y repulsión entre polos magnéticos variaba inversamente con el cuadrado de la distancia entre ellos[7].

Casi simultáneamente, pero del otro lado del Atlántico, Joseph Priestley (1733-1804), un inglés emigrado a Estados Unidos y descubridor del oxígeno, publicó en 1756 un libro titulado *History and Present State of Electricity*. Este título puede causar gracia en tanto que poca *historia* podía tener un area de la física que recién comenzaba a desarrollarse. En el libro describe un experimento que ya había sido realizado por su amigo Benjamin Franklin (1706-1790) y que él había confirmado, donde mostraba que no hay fuerzas eléctricas dentro de una caja metálica cerrada. Al respecto escribió:

> ¿No podemos inferir de este experimento que la atracción de la

electricidad está sujeta a las mismas leyes de la gravitación y es, por tanto, de acuerdo con los cuadrados de las distancias; ya que se demuestra fácilmente que si la Tierra tuviera la forma de un cascarón, un cuerpo dentro de ella no sería atraído más hacia un lado que hacia otro?


THE
HISTORY
AND
PRESENT STATE
OF
ELECTRICITY,
WITH
ORIGINAL EXPERIMENTS,

By JOSEPH PRIESTLEY, LL.D. F.R.S.

THE SECOND EDITION, CORRECTED AND ENLARGED.

Causa latet, vis est notissima.
OVID.

LONDON,
Printed for J. DODSLEY in Pall-Mall, J. JOHNSON and J. PAYNE in Pater-noster Row, and T. CADELL (Successor to Mr. MILLAR) in the Strand. MDCCLXIX.

Portada de la segunda edición de "The history and present state of electricity" de Joseph Priestley (London: J. Dodsley et al., 1769).

Aunque esta aguda y sagaz especulación no atrajo la atención que merecía, podríamos afirmar que aproximadamente por 1770, se tenía el convencimiento de que las fuerzas gravitacionales, eléctricas y magnéticas estaban sujetas a la misma ley de variación respecto de la distancia. Esto es la ley de cuadrado inverso. A partir de la publicación en julio de 1820 por el danés Christian Oersted (1777-1851) de un folleto describiendo sus resultados sobre los efectos de la electricidad sobre la aguja magnética de una brújula, comenzó a hacerse claro que las fuerzas magnéticas no eran tan simples como se había pensado. La ley de cuadrado inverso para fuerzas electrostáticas entre dos cargas, en cambio, obtuvo rango de ley. Una verificación experimental directa de esta dependencia fue obtenida por un escocés, John Robison (1739-1805) pero, sin embargo, no publicó sus resultados hasta varios años después. Mientras tanto un ingeniero francés, Charles Augustin de Coulomb (1736 - 1806) lograría la síntesis final en una serie de célebres memorias publicadas a partir de 1785. Mientras que la deducción de Priestley sobre la ley de cuadrado inverso estaba basada en una analogía con la gravitación, la prueba de Coulomb fue directa y aplicada a la interacción de ambos tipos de cargas, proporcionando una verificación convincente de lo que hasta entonces había sido sólo una suposición.

La ley de fuerza electrostática se conoce hoy como ley de Coulomb. Señala que la fuerza entre dos partículas separadas una distancia r es completamente semejante a la fuerza gravitatoria,

$$\mathbf{F}_{21} = \beta_0 \, q_2 \, q_1 \, \frac{\mathbf{r}}{r^3} \, ,$$

donde q es una propiedad de la materia denominada *carga eléctrica*. Así como con la masa gravitatoria, la carga eléctrica puede definirse operacionalmente con el método de Mach. Pero, a diferencia de la masa gravitatoria, la carga puede ser tanto negativa como positiva. Por lo tanto, la fuerza puede ser repulsiva (para cargas de igual signo) ó atractiva (para cargas de signo contrario). Por medio de su experimento, Coulomb había logrado determinar la constante β_0, resultando ser aproximadamente igual a

$$\beta_0 \approx 9 \times 10^9 \, \frac{\text{Newton} \cdot \text{metro}^2}{\text{Coulomb}^2} \, .$$

La vida de Charles Augustin de Coulomb (1736 – 1806) tiene mucho de aventura. Cuando su padre, oficial del ejército y posteriormente recaudador de impuestos, perdió su fortuna, Coulomb decidió enrolarse en la escuela de ingeniería militar de Mézières. Pasó nueve años en la Martinica, reconstruyendo fuertes que habían sido destruidos durante la Guerra de los Siete Años. Cuando regresó a Francia tenía 36 años y la salud arruinada. Por ese entonces compartió un premio ofrecido por la Académie de Sciences por estudios sobre el magnetismo. Esto le permitió entrar en la Académie en 1781 y, más importante, dedicarse al diseño de la balanza de torsión que aparece, junto a el, en este retrato.

9. Determinación de la constante de gravitación universal

Mientras esto ocurría con las fuerzas electrostáticas, ¿porqué no se realizaba un experimento semejante para determinar, por fin, la constante universal γ_0 de la Ley de la Gravitación Universal? Ya en 1760 John Michell había inventado una balanza de torsión (semejante a la que Coulomb desarrolló independientemente veinte años después para sus experimentos eléctricos) para estudiar la fuerza gravitatoria, pero no tuvo éxito. Finalmente en 1798 su amigo Henry Cavendish (1731-1810), evidentemente uno de los investigadores experimentales más hábiles del siglo XVIII, obtuvo resultados confiables. La constante universal γ_0 resultó ser aproximadamente igual a

$$\gamma_0 \approx 6.673 \times 10^{-11} \frac{\text{Newton} \cdot \text{metro}^2}{\text{kilogramo}^2} \,.$$

Esta información nos permite comparar las fuerzas electrostáticas y gravitatoria. Consideremos -por ejemplo- al electrón como unidad de masa y carga. Esto es muy común, al menos en física atómica. La relación carga/masa de esta partícula es aproximadamente igual a $e/m = 0.176 \times 10^{13}$ Coulomb/kilogramo. Por lo tanto, el cociente de ambas fuerzas es del orden de

$$\frac{F_{\text{grav}}}{F_{\text{elec}}} \approx 0.24 \times 10^{-44} \,.$$

Este es un número increíblemente pequeño. Sólo por comparación, tengan en cuenta que es aún dos órdenes de magnitud menor que el cociente del tiempo que tarda la luz en cruzar el diámetro de un protón ($\approx 10^{-24}$ seg) con la edad del Universo ($\approx 2 \times 10^{10}$ años). Por ejemplo, para que un electrón sienta una interacción gravitatoria de igual magnitud que la interacción electrostática producida por otro electrón[8] deberíamos utilizar un cuerpo con una masa enorme de aproximadamente 3.8×10^{12}kg.

Perteneciente a la aristocracia inglesa y heredero de una de las fortunas más importantes de la época, tanto que al morir dejó una herencia de más de un millón de libras, Henry Cavendish (1731-1810) era una persona sumamente excéntrica. Vestía de manera extravagante, su hablar era confuso y difícilmente entendible, rehuía de todo contacto social y, con especial pavor, de las mujeres. Había estudiado en Cambridge aunque, como era común entre la aristocracia de la época, no se graduó. Su relación con otros científicos se redujo a su mínima expresión, aunque ello no impidió que fuera nombrado miembro de la Royal Society en 1803. En su época Cavendish llegó a ser conocido más como químico que como físico, área publicó relativamente pocos trabajos.

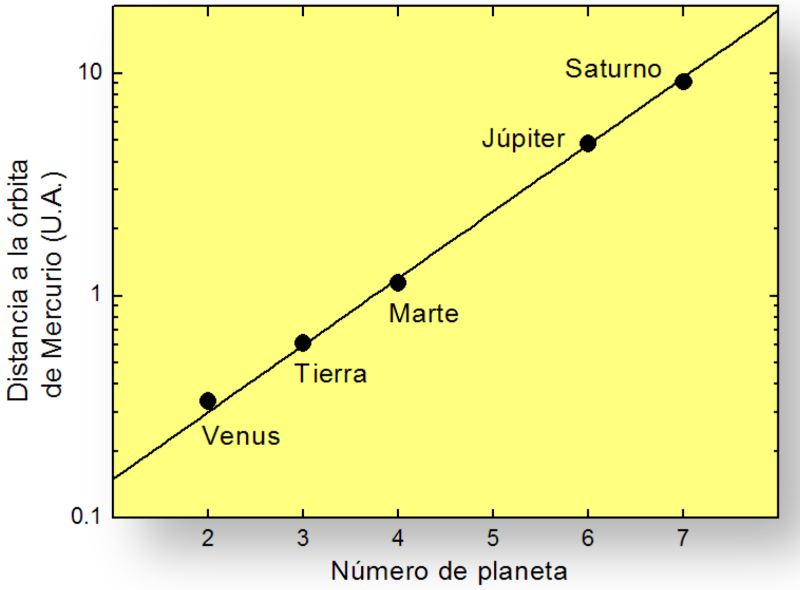
10. La ley de Titius-Bode

Al comenzar este apunte contamos como, mientras buscaba algún tipo de relación entre las dimensiones de las órbitas de los planetas, Kepler descubrió la Ley Armónica, que años más tarde condujo a Newton a su ley de Gravitación Universal. Pero había otra relación, acaso más extraña, que Kepler no advirtió. Consideremos las distancias al Sol de la Tierra y los cinco planetas conocidos en aquel entonces en unidades astronómicas U.A. (donde una unidad astronómica se define como la distancia de la Tierra al Sol)[9]

Mercurio	387	$\times 10^{-3}$ U.A.
Venus	723	$\times 10^{-3}$ U.A.
Tierra	1000	$\times 10^{-3}$ U.A.
Marte	1524	$\times 10^{-3}$ U.A.
Júpiter	5201	$\times 10^{-3}$ U.A.
Saturno	9540	$\times 10^{-3}$ U.A.

Tal como se puede apreciar en la siguiente figura, estos radios muestran una tendencia muy clara, excepto por un salto entre Marte y Júpiter.

El primero en identificar esta secuencia fue Johann Daniel Titius (1729-1796), profesor de matemáticas en Wittenberg. Presentó este descubrimiento en 1766 en una párrafo de 22 líneas que agregó a su traducción al alemán de la obra “Contemplation de la Nature” del famoso naturalista suizo Charles Bonnet (1720-1793). Recién en la segunda edición de 1772, Titius incluyó esta adición como



Secuencia de Titius aplicada a los planetas conocidos en 1766.

una nota del traductor.

Johann Elert Bode (1720-1826) leyó esa nota y la incluyó como propia en la segunda edición de 1772 de su texto de astronomía "Deutliche Anleitung zur Kenntniss des destirten Himmels", sin dar crédito a Titius, lo cual recién hizo muchos años más tarde. Durante varias décadas Bode fue director del Observatorio de Berlín (1786-1925) y editor del "Astronomisches Jahrbuch". En una comunicación al Jahrbuch del 27 de Febrero de 1787, un tal reverendo Johann F. Wurm, pastor de Gruibingen, en Württenberg, presenta la Ley de Titius - Bode en forma algebraica, donde el radio (en unidades astronómicas) de la órbita del enésimo planeta verifica

$$R_n \approx 0{,}387 + 0{,}293 \times 2^{n-2} \ .$$

Esta ley ajustaba muy bien los radios de todos los planetas, incluido el "planeta desconocido" (n = 5) desde Mercurio hasta Urano ($R_8 = 18{,}983 A.U.$), planeta que había sido descubierto por William Herschel seis años antes[10].

Aún quedaba un hueco en la serie de Titius-Bode entre las órbitas de Marte y Júpiter. Y es aquí donde se da una de las peores metidas de pata de la Historia de la Ciencia. En 1801, Georg Wilhelm Friedrich Hegel (1770-1831), quien más tarde se convertiría en uno de los filósofos más renombrados, presentó un trabajo llamado *De orbitis planetarum* a fin de obtener la habilitación como Privatdozent en la Universidad de Jena. En esta obra, sin duda desafortunada, el filósofo demostraba con gran brillantez lógica la imposibilidad de que existieran astros entre Marte y Júpiter. Esta fue la primera y última incursión de Hegel en las "Ciencias Positivas", ya que el 1 de enero de ese mismo año de 1801, el padre Giuseppe Piazzi del Observatorio de Palermo había descubierto un nuevo planeta, que llamó Ceres, en la posición asignada por la ley de Titius-Bode entre Marte y Júpiter. Un año más tarde, con el descubrimiento de otro planeta, Pallas, en la misma órbita, se concluyo que estos eran dos de muchos fragmentos ó asteroides, posibles restos de un planeta destruido.

11. Descubrimiento de nuevos planetas

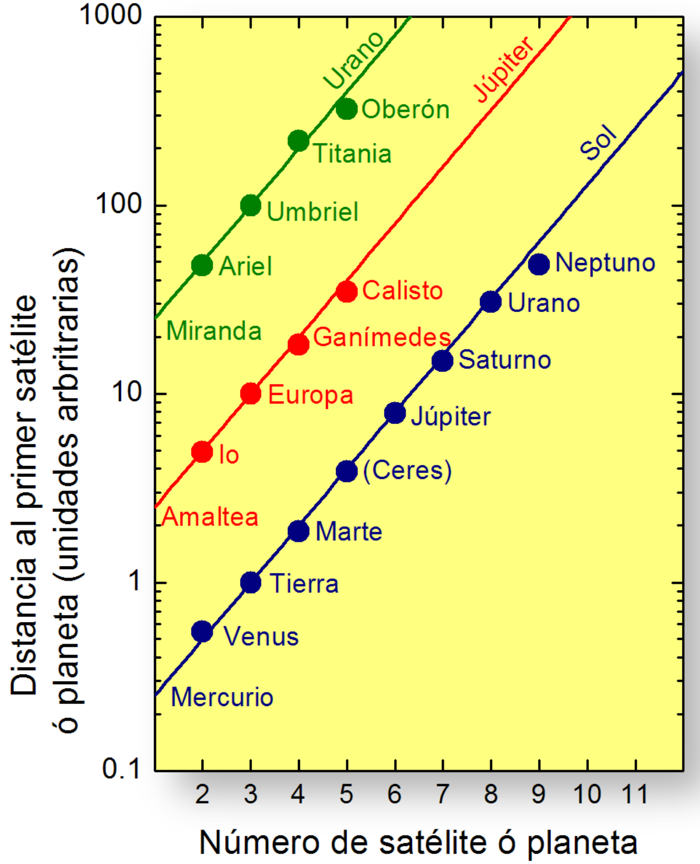
Hacia 1830 se volvió cada vez más evidente que el planeta Urano se estaba apartando de la trayectoria elíptica calculada a partir de las primeras mediciones. John C. Adams, un joven estudiante de la Universidad de Cambridge pensó que esas discrepancias se podían deber a las perturbaciones introducidas por algún otro cuerpo celeste aún no descubierto. Adams emprendió la tarea inmensamente difícil de localizar ese planeta desconocido, usando para ello las leyes de Newton, las observaciones sobre el movimiento de Urano y la ley de Titius-Bode. Años después encontró ese planeta, pero solamente en el papel, y escribió al observatorio de Greenwich para que con su poderoso telescopio buscaran al nuevo e hipotético planeta en la localización que el predecía. Pero Adams era un matemático joven y desconocido, y la gente de Greenwich no tomó en cuenta sus ideas. Unos pocos meses después un joven francés de nombre Leverrier publicó un trabajo donde, en forma independiente, llegaba a la misma conclusión que Adams. Le escribió al director del observatorio de Berlín quien, sin la arrogancia de sus colegas ingleses y la misma noche de la llegada de la carta, apuntó su telescopio hacia la posición predicha y encontró el planeta desconocido. De esta manera *Neptuno* fue agregado al sistema solar en 1846, Este era otro triunfo para la teoría de Newton, pero una grave derrota para la ley de Titius Bode, que erraba su posición en un 26 %.

Neptuno comenzó a ser observado con la misma pasión que Urano 65 años antes. Con el tiempo se advirtió que su órbita también se apartaba de la trayectoria predicha por la mecánica newtoniana. Pero esta vez los científicos sabían que hacer. Una ardua investigación de 25 años en el observatorio Lowell de Arizona condujo en 1930 al descubrimiento de Plutón. Veintiún años antes, en 1909, otro astrónomo, W. H. Pickering, había hecho, independientemente, cálculos y predicciones semejantes y había iniciado la búsqueda del planeta en el observatorio de Monte Wilson en California. Sin embargo no había encontrado nada. Después del descubrimiento del observatorio Lowell en 1930, las antiguas fotografías de Monte Wilson fueron examinadas nuevamente y mostraron que Plutón podría haber sido encontrado en 1919 ¡si su imagen no hubiera caído directamente sobre una pequeña falla en la emulsión fotográfica!

Nuevamente, la ley de Titius-Bode falló por un amplio margen (91 %), pero la órbita de Plutón es muy excéntrica e inclinada como para tenerla en cuenta. De todas maneras, la ley de Titius-Bode parece andar muy bien para los restantes planetas y además, escribiéndola en forma simplificada como

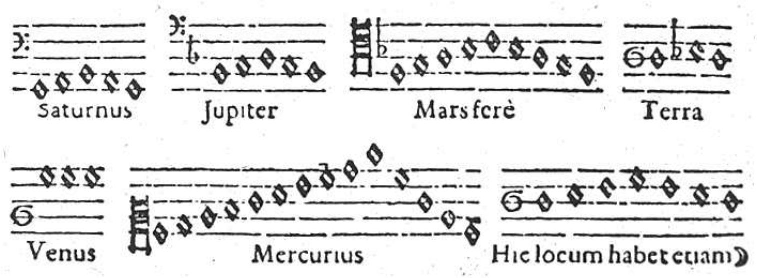
$$\frac{R_{n+1} - R_1}{R_n - R_1} \approx 2 \, ,$$

parece funcionar razonablemente bien para las lunas de Urano y Júpiter, eliminando, en este último caso, los satélites externos a Calisto, con órbitas excéntricas ó retrógradas. También las lunas de Saturno parecen seguir esta tendencia, con excepción de los anillos, Hiperión (órbita excéntrica) y Phoebe (órbita retrógrada). Que esta ley sea aproximadamente aplicable a todos estos sistemas no parece ser fruto de la casualidad. ¿Qué opinan ustedes?



Ley de Titius–Bode aplicada a los planetas del sistema solar y las lunas de Urano y Júpiter.

Para terminar, podemos imaginar que si Kepler hubiera calculado la diferencia entre los diámetros de las órbitas de los Planetas y la órbita de Mercurio, se habría encontrado con una progresión geométrica de base 2, que en música es la razón entre dos octavas sucesiva. Y esto era lo que realmente estaba buscando, su “Música de las Esferas”.



En su obra “Harmonices Mundi” de 1619, Kepler propuso que cada planeta produce un tono musical característico.

Notas

[1]It has pleased Almighty God in his just severity to visit this town of Cambridge with the plague of pestilence (Emmanuel College, 1665).

[2]Si imaginamos que la “partícula” 2 es la Tierra, lo que estoy haciendo es nada más que comparar el peso de la partícula 1 con una unidad patrón dada por la partícula 0.

[3]Uno puede legítimamente preguntar que se entiende por distancia entre dos objetos de cierto tamaño. En *De Motu Corporum* Newton demuestra que una esfera homogénea atrae cualquier cuerpo con una fuerza que es directamente proporcional a su masa e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia al centro de la esfera. Esta demostración era una deuda importante en todos sus trabajos anteriores.

[4]Eratóstenes de Cirene (-275 / -194), educado en Atenas y Alejandría (de cuya biblioteca fue director) realizó la primera medición científica de la circunferencia de la Tierra. En Siena, una ciudad de Egipto distante 5000 estadios (1 estadio = 0.1575 km) al Sur de Alejandría, había un pozo cuyo fondo sólo era iluminado por el Sol el día del solsticio de verano al mediodía. Ese mismo día y a esa misma hora en Alejandría, el ángulo de los rayos solares con la vertical era de 7 grados con 20 minutos. Como 7^o 20’ es 1/50 de 360^o, la distancia Alejandría-Siene tiene que ser 1/50 de la circunferencia de la Tierra, que entonces es de 250000 estadios. Estos 39375 km son impresionantemente cercanos a los aproximadamente 40000 km calculados actualmente.

[5]en términos del radio de la órbita: $v \approx 2\pi R/28$ días.

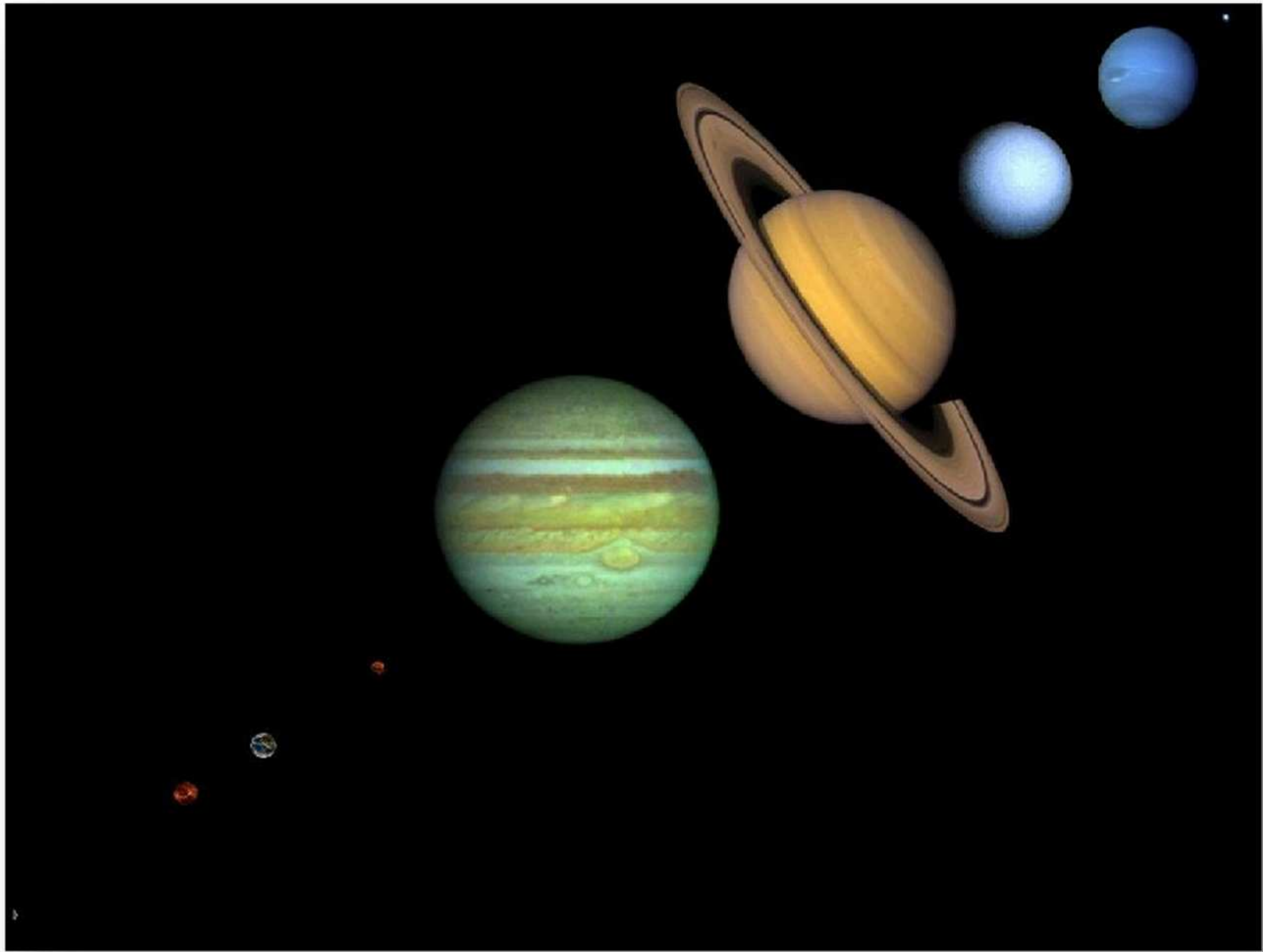
[6]De hecho, con una velocidad igual a $v = \sqrt{gR} \approx 7.9$ km/seg

[7]R. A. Luftburrow: Amer. J. Phys. **31**, 60 (1963)

[8]¡Cuya carga eléctrica es indivisible!

[9]Los valores indicados en la tabla corresponden a los dados en la Primera Edición de la publicación de Johann E. Bode: *Kurzgefasste Erläuterung der Sternkunde und den [sic] dazu gehörigen Wissenschaften* (Christian Friedrich Himburg, Berlin, 1778).

[10]Una noche de 1781, William Herschel, músico profesional y astrónomo aficionado, estaba en su casa de Bath, Inglaterra, observando el cielo con un telescopio de fabricación casera, cuando descubrió un nuevo objeto celeste. La noticia corrió como reguero de pólvora, y pronto los astrónomos de todo el mundo comenzaron a observarlo. Poco más tarde, se concluyó que no se trataba de un cometa, como había pensado Herschel, sino de un nuevo planeta 100 veces mayor que la Tierra y a una distancia del Sol que era casi el doble que la de Saturno. De esta manera se había descubierto Urano.



De izquierda a derecha: Mercurio, Venus, Tierra, Marte, Júpiter, Saturno, Urano, Neptuno y Plutón.